Title	ソリトン方程式間の関係(厳密解を中心とする非線型波動と関連する諸問題,研究会報告)
Author(s)	広田, 良吾
Citation	物性研究 (1983), 40(2): 248-251
Issue Date	1983-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90944
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ソリトン方程式間の関係

広大・工　広 田 良 吾

現在まで物理現象を記述するソリトン方程式の数は，30以上あり，数学的なソリトン方程式は無限にある事が知られている。

ソリトン方程式とは何か？　その定義もはっきりしていないが，ここではN－ソリトン解を有する非線形方程式の意味に限定する。

色々なソリトン方程式をある立場から統一的に記述する試みが種々なされて来たが，ここでは従属変数及び独立変数の変換によるソリトン方程式の統一について述べる。

I)　従属変数の変換による統一

ある種の非線形微分方程式は適当な従属変数の変換によって〝双一次形式″の微分方程式に変換される。詳しい説明は省略して結果だけを述べる。Example 1として

(i)　Nonlinear Schrödinger eq.

$$i\psi_t+\psi_{xx}+\frac{1}{2}|\psi|^2\psi=0$$

(ii)　Heisenberg Ferromagnet eq.

$$\vec{S}_t=\vec{S}\times\vec{S}_{xx},\quad \vec{S}\equiv(S_1,S_2,S_3),$$

(iii)　New eq.

$$i\phi_t+\phi_{xx}+\frac{2|\phi_x|^2}{1-|\phi|^2}\phi=0,$$

は，それぞれ変換

(i)　$\psi=2D_x g\cdot f/F^2$

(ii)　$S_1+iS_2=2f^*g/F^2,\quad S_3=(f^*f-g^*g)/F^2$

(iii)　$\phi=g/F,$

ここで,

$$F^2 = f^* f + g^* g,\ (*\text{は complex conjugate})$$

$$D_x^m f(x)\cdot g(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m f(x)\, g(x')\Big|_{x'=x},$$

によって同じ双一次形式の微分方程式

$$\begin{cases} D_x(f^*\cdot f + g^*\cdot g) = 0 \\ (\mathrm{i}D_t + D_x^2) f\cdot g^* = 0 \\ (\mathrm{i}D_t - D_x^2)(f^*\cdot f - g^*\cdot g) = 0 \end{cases}$$

に変換される。Example 2として

(i) Pohlmeyer-Lund-Regge eq.

$$\begin{cases} \theta_{xt} - \sin\theta\cos\theta - \dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\beta_x\beta_t = 0, \\ (\beta_t \tan^2\theta)_x + (\beta_x\tan^2\theta)_t = 0, \end{cases}$$

(ii) Getmanov eq.

$$\psi_{xt} + \frac{\psi_x\psi_t\psi^*}{1-|\psi|^2} - \psi(1-|\psi|^2) = 0,$$

(iii) New eq.

$$\phi_{xt} = \phi(1-|\phi_t|^2)^{1/2},$$

は，それぞれ変換

(i) $$\begin{cases} f = \exp(\rho + \mathrm{i}\alpha)\cos\theta, \\ g = \exp(\rho + \mathrm{i}\beta)\sin\theta, \end{cases}$$

(ii) $\psi = g/F,\quad F^2 = f^* f + g^* g,$

(iii) $\phi = 2(D_x g \cdot f)/F^2$

によって,

$$
\begin{cases}
D_x(f^* \cdot f + g^* \cdot g) = 0, \\
(D_x D_t - 1) f \cdot g^* = 0, \\
D_x D_t (f^* \cdot f - g^* \cdot g) + 2 g^* g = 0,
\end{cases}
$$

になる。以上の例は双一次形式の微分方程式がより基本的な方程式である事を示している。

II) 独立変数の変換による統一

N. Saitoh によると, Toda 方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \log[1 + V_n(\tau)] = V_{n+1}(\tau) + V_{n-1}(\tau) - 2V_n(\tau),$$

は独立変数の変換

$$\tau = t/\varepsilon^3, \quad n = [x + (\varepsilon^{-2} - \varepsilon^2)t]/\varepsilon,$$

$$V_n(\tau) = \varepsilon^2 u(x, t), \quad \varepsilon : \text{パラメータ},$$

によって,次式になる。

$$[\frac{\partial}{\partial t} - (\varepsilon^{-2} - \varepsilon^2)\frac{\partial}{\partial x}]^2 \log[1 + \varepsilon^2 u(x, t)]$$

$$= \varepsilon^{-4}[u(x+\varepsilon, t) + u(x-\varepsilon, t) - 2u(x, t)]$$

この式は $\varepsilon = 1$ のとき Toda 方程式と同一であるが, $\varepsilon \to 0$ の極限で KdV 方程式

$$u_t + \frac{1}{2} u u_x + \frac{1}{24} u_{xxx} = 0$$

となる。 Toda 方程式から独立変数の変換と極限操作で KdV 方程式が得られるので,我々は Toda 方程式をより基本的な方程式と考える。

N. Saitoh の方法を双一次形式に適用する。 Toda 方程式は従属変数の変換

$$V_n(\tau)=\frac{d^2}{d\tau^2}\log f_n(\tau)$$

により，双一次形式

$$[D_\tau^2-2(\cosh D_n-1)]f_n(\tau)\cdot f_n(\tau)$$

になる。ここで独立変数の変換をやると

$$\begin{cases} D_\tau=\varepsilon^3 D_t-(\varepsilon-\varepsilon^5)D_x \\ \\ D_n=\varepsilon D_x \end{cases}$$

となるので，双一次形式は

$$\{[\varepsilon^3 D_t-(\varepsilon-\varepsilon^5)D_x]^2-2(\cosh D_n-1)\}f\cdot f=0$$

となり，$\varepsilon\to 0$ の極限で

$$D_x(D_t+\frac{1}{24}D_x^3)f\cdot f=0$$

即ちKdV方程式の双一次形式が得られる。

では「従属変数fのみを含む双一次形式の最も基本的な式は？」との問いに対する答は，非常に難しくて結論は出ないが，現在（1982年1月）の時点では，次の Miwa's Difference eq. と思われる。

$$\begin{cases} (Z_1 e^{D_1}+Z_2 e^{D_2}+Z_3 e^{D_3}+Z_4 e^{D_4})f\cdot f=0, \\ \\ Z_1+Z_2+Z_3+Z_4=0, \\ \\ D_1+D_2+D_3+D_4=0, \end{cases}$$

ここで Z_i はパラメータ，D_i は前に定義した二項演算子 for $i=1, 2, 3, 4$.

この式は非常に一般的で一変数 f を含む双一次形式は殆んど含まれている。